**Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.**

Von

**Georg Cantor** (Halle a. S.).

In dem Aufsatze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller

reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math, Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... , *n*, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... , *n*, ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles (a ... ß) sich nicht in der Reihenforrn:

**ω1, ω2, …, ω*ν*, ...**

vorstellen lässt.

Es lässt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

**E = (x1, x2, … x*ν*, ...),**

welche von unendlich vielen Coordinaten x1,  x2, …, x*n*, … abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

 Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

EI = (m, m, m, m, … ),

EII = (w, w, w, w, … ),

EIII = (m, w, m, w, … ).

Ich behaupte nun, das seine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe 1, 2, …, *ν*, … hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

“Ist E1, E2, …, E*ν*, … irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E0 von M, welches mit keinem E*ν* übereinstimmt.”

Zum Beweise sei:

**With Respect to an Elementary Question with Regards to the Theory of Manifolds.**

Von

**Georg Cantor** (Halle a. S.).

It is likely that the first proof that there are infinite manifolds which are not mutually unique to the set of all finite integers 1, 2, 3, …, *n*, … (or equivalently, these manifolds do not have the cardinality of the set of numbers 1, 2, 3, …, *n*, …), is presented in the essay, titled: A Property of the Totality of All Real Algebraic Numbers (Journ. of Math, vol. 77, p 258). It follows from that which was proven in § 2 that for any interval (a ... ß) in the set of all real numbers that *a* and *b* are non-sequetial: that the sequence

**ω1, ω2, …, ω*ν*, ...**

of imaginary numbers exists within the interval (a ... ß).

However, a much simpler proof can be provided which is independent of the consideration of the irrational numbers.

Namely, let m and w be any two mutually exclusive characters, so we consider a quintessential M of elements:

**E = (x1, x2, … x*ν*, ...),**

that depend on infinitely many coordinates x1, x2, …, x*ν*, …, where each of these coordinates is either m or w. As such, M is the totality of all elements in E.

For example, the following are three elements of M:

EI = (m, m, m, m, … ),

EII = (w, w, w, w, … ),

EIII = (m, w, m, w, … ).

I now assert that there exists such a manifold M that does not have the breath of the series 1, 2,..., *ν*,....

 As can be seen from the following sets:

"E1, E2, …, E*ν*, … is any infinite number of elements of the manifold M, so M always contains an element E0, where no two values for E*ν* are the same.”

The evidence is:

E1 = (a1,1, a1,2, …, a1,*ν*, …),

E1 = (a2,1, a2,2, …, a2,*ν*, …),

…

E1 = (a*μ*,1, a*μ*,2, …, a*μ*,*ν*, …),

…

Hier sind die a*μ*,*ν* in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe b1, b2, …, b*ν*, …, so definirt, dass b*ν* auch nur gleich m oder w und von a*v*,*ν* verschieden sei.

Ist also a*v*,*ν* = m, so ist b*ν* = w, und ist a*ν*,*v* = w, so ist b*ν* = m.

Betrachten wir alsdann das Element:

E0 = (b­1, b2, b3, …)

von M, so siet man ohne weiteres, dass die Gleichung:

E0 = E*μ*

für keinen positive ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von *ν* ;

b*ν* = a*μ*,*ν*

also auch im besondern:

b*ν* = a*μ*,*μ*

wäre, was durch die Definition von b*ν* ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: E1, E2, …, E*ν*, … bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, dass ein Ding E0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner grossen Einfachheit, sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Princip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinirter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.

Sei beispielsweise L ein Linearcontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrössen z, die ≥ 0 und ≤ 1 sind, durchläuft.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutign Functionen f(x), welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die ≥ 0 und ≤ 1 sind, durchläuft.

Dass M keine kleinere Mächtigkeit hat als L, folgt daraus, dass sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben, wie L, z. B. die Teilmenge, welche aus allen Functionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M nicht gleiche Mächtigkeit mit L, da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen liesse, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Function der beiden Veränderlichen x und z:

ϕ(x, z)

gedacht werden, so dass durch jede Specialisirung von z ein Element f(x) = ϕ(x, z) von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element f(x) von M aus ϕ(x, z) durch eine einzige bestimmte Specialisirung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter g(x) diejenige eindeutige Functon von x,

E1 = (a1,1, a1,2, …, a1,*ν*, …),

E2 = (a2,1, a2,2, …, a2,*ν*, …),

…

E*μ* = (a*μ*,1, a*μ*,2, …, a*μ*,*ν*, …),

…

Here are the a*μ*,*ν* ordered according to either m or w. Now let there be the series b1, b2, …, b*ν*, …. Our series defined, we can see that b*ν* only equals m or w and not a*ν*,*ν*.

So if a*v*,*ν* = m, then b*ν* = w, and if a*ν*,*v* = w, then b*ν* = m.

As such, let us look at the element:

E0 = (b1, b2, b3,...)

with respect to m, so that the equation:

E0 = E*μ*

For any positive integer value of *μ* can be fulfilled for the relevant *μ* and for all integer values of *ν*; where

b*ν* = a*μ*,*ν*

and also in the special case:

b*ν* = a*μ*,*μ*

which, by the definition of b*ν*, is excluded. It immediately follows from this proposition that the totality of all elements of M are not in the ordered form: E1, E2,..., E*ν*,... because we would otherwise face the contradiction that E0 is both an element of M and is not an element of M.

This evidence appears noteworthy not only because of its great simplicity, but also because if the principle is applied to general sets then it readily extends that such sets have no maximum width for their manifolds; or in-other-words, any M can be adjusted to fit any given manifold L, which is of greater thickness than L.

For example, let us consider L as a linear continuum of all real number sizes z such that 0 ≤ z ≤ 1.

You can understand M to be the sum of all common binary functions f(x), which take on only two values 0 or 1, while x can be any real value such that 0 ≤ x ≤ 1.

That M has no lesser thickness than L, it follows that subsets of M, which have the same cardinality, can have the same thickness as L, such as the subset which consists of all function of x; such that for a single value x0 f(x) is the value of 1, and for all other values f(x) returns the value 0.

M does not have the same thickness as L because then the variables z would be in each unique relationship of the manifold M, and then we could define M in the form of a unique function of two variables x and z:

 (x, z)

as such, by any special identifier z, and element f(x) = (x, z) is obtained from M, and vice versa each element of f(x) of M emerges from (x, z) by a single specific identifier z. This leads to a contradiction. Because g(x) is a unique function of x which accepts only the values 0 or 1 and is different for each value of x by ϕ(x, x), as g(x) is an element of M; on the other hand, there

welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von ϕ(x, x) verschieden ist, so ist einerseits g(x) ein Element von M, andererseits kann g(x) durch keine Specialisirung z = z­0 aus ϕ(x, z) hervorgehen, weil ϕ(z0, z0) von g(z0) verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L, so folgt, dass sie grösser ist als die Mächtigkeit von L. (Vgl. Crelle's Journal, Bd. 84 S. 242.)

Ich habe bereits in den "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Leipzig 1883; Math. Annalen Bd. 21) durch ganz andere Hülfsmittel gezeigt, dass die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Grösse nach geordnet denken, eine "wohlgeordnete Menge" bildet, so dass es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst grössere giebt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst grössere folgt.

Die "Mächtigkeiten" repräsentiren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen "Cardinalzahlen", sie sind nichts anderes als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen; nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche "Zahlentheorie" zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschliessung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.

cannot exist a special index z = z0 for ϕ(x, z) for g(x) because ϕ(z0, z0) is different from g(z0).

Thus the power of M is not less than or equal to that of L; which leads us to the conclusion that, the power of M is greater than the power of L. (cf. Crelle's journal, BD. 84 S. 242.)

I have already shown by other means in the "understanding of a general manifold gauge" (Leipzig 1883; Annals of math. vol. 21) that the powers have no maximum; There it was even proved that the sum of all widths, if we reflect on the order of the sizes, a “well-ordered set” forms, such that the sets are ordered from thinnest to thickest, then it follows that in each next set the width of the subsequent set is larger than the previous, and so on *ad infinatum*.

These “widths” represent the only and necessary generalization of the finite “cardinal numbers.” They are nothing more than the actual-infinitely large cardinal numbers, and you come to the same reality and certainty as those; only that the lawful relationships among them, the relevant “number theory” part is a different kind to them, as in the areas of the finite.

Further development of this field is the task of the future.